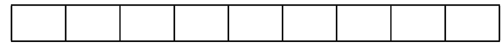
Шести клас

1. За приготване на 100 г конфитюр от смокини са нужни 60 г смокини и 40 г добавена захар. Смокините съдържат x% естествена захар. Общото захарно съдържание на конфитюра е 76%. Определете x.

A) 40 B) 48 C) 52 D) 56 E) 60 F) 64

1. Отг. E В 100 г конфитюр има общо 76 г захар, от които от смокините са $76-40=36$ г, или 60% от 60 г.

2. Правоъгълникът на чертежа е разделен на 9 правоъгълничета. В едно от тях ще нарисувам човече. Броят правоъгълници на чертежа, в които има човече, може да се окаже:



A) 16 B) 18 C) 20 D) 21 E) 22 F) 24

2. Отг. A, D, F Един правоъгълник има човече точно когато левият му край е отляво на човечето, а десният – отдясно. На чертежа има 10 вертикални чертички, така че в зависимост от мястото на човечето търсеният брой може да е $1.9=9$, $2.8=16$, $3.7=21$, $4.6=24$ или $5.5=25$.

3. Колко са трицифрените числа, всяко от които дава остатък 2 при деление на 3, остатък 3 при деление на 5 и остатък 4 при деление на 7?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18 F) 21

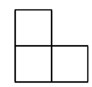
3. Отг. B Ако x е такова число, то $2x-1$ се дели на 3, 5 и 7, а значи и на НОК$(3;5;7)=105$. Понеже $2x-1$ е нечетно и е поне 199, но не повече от 1997, то е някое от числата $3.105=315$, $5.105=525$, ..., $19.105=1995$. Всяко от тези 9 числа поражда стойност за x ($316:2=158$, $526:2=263$, ..., $1996:2=998$).

4. Произведението на цифрите на число с две или повече цифри може да е равно на:

A) 234 B) 243 C) 324 D) 342 E) 423 F) 432

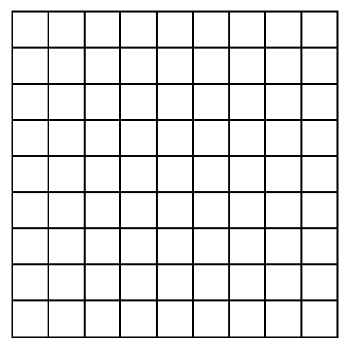
4. Отг. B, C, F Имаме $243=9.9.3$, $324=9.9.4$ и $432=9.8.6$. За останалите числа подобно представяне е невъзможно, понеже имат прост множител, по4голям от 9.

5. За кои от дадените стойности на n е възможно да нарежем квадрат $n\times n$ на „ъгълчета” като показаното отдясно (може и завъртени)?



A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 2017 F) 2019

5. Отг. B, D, F Директно се проверява, че (A) е невъзможно, а понеже n трябва да се дели на 3, отпадат и (C) и (E). От правоъгълници 3×2 може да сглобим (B), а (D) е показано вдясно. Можем да получим (F) от (D) плюс два правоъгълника 9×2010 и един квадрат 2010×2010, които могат да се сглобят от правоъгълници 3×2.



6. На бал присъствали 6 семейни двойки и никакви други хора. В един момент трима от мъжете танцували с жените си, а останалите танцували с чужди. По колко начина може да е станало това?

6. **Отг. 40** Има $6.5.4:3! = 20$ начина да изберем тримата, които танцуват с жените си. За останалите трима има 2 начина да изберат партньорките си. Отговор: $20.2 = 40$.

7. Цифрите a, b, c са различни и ненулеви. Има шест различни трицифрени числа, записващи се с тези три цифри. Сборът на пет от тях е 2017. Кое е шестото?

7. **Отг. 425** Сборът на шестте числа е $222(a+b+c) > 2017+123$, така че $a+b+c>9$. При $a+b+c=11$ получаваме сбор $222.11 = 2442$ и липсващото число е $2442-2017=425$, чийто сбор от цифрите наистина е 11. При $a+b+c=10$, $a+b+c=12$ и $a+b+c=13$ липсващите числа са с неподходящ сбор от цифрите, а при $a+b+c\geq 14$ липсващото число е с повече от три цифри.

8. Колко са всички трицифрени кратни на 3, чиито три цифри са различни и никоя от тях не е нула?

8. **Отг. 180** Ако трите цифри са с различни остатъци при деление на 3, то има една цифра сред $\{3;6;9\}$, една сред $\{1;4;7\}$ и една сред $\{2;5;8\}$; има $3.3.3=27$ избора за цифрите и $3.2.1=6$ избора за реда им, т.е. $27.6=162$ такива числа. Има още $3.2.1=6$ числа с цифрите $\{3;6;9\}$ и още по толкова с $\{1;4;7\}$ и с $\{2;5;8\}$. Отговор: $162+18=180$.

9. Два отбора завършили мач при резултат 5**:**5, като по време на мача никой отбор не успял да поведе с повече от три гола. При всеки нов гол Гошо записвал в тефтера си резултата. Колко са различните поредици от резултати, които могат да се появят в тефтера на Гошо?

9. **Отг. 232** В показаната таблица са записани броя възможни редици в тефтерчето, водещи до даден разрешен резултат (головете на домакина са показани по редове, а головете на госта – по колони). Всеки нов брой е равен на сбора на този отгоре и този отляво.

	:0	**:1**	**:2**	**:3**	**:4**	**:5**
0:	1	1	1	1	4	4
1:	1	2	3	4	4	4
2:	1	3	6	10	14	14
3:	1	4	10	20	34	48
4:	4	4	14	34	68	116
5:	4	4	14	48	116	232

10. Няколко отбора играли всеки с всеки по един мач; всеки получавал 3 точки за победа, 1 точка за равен и 0 точки за загуба. Миро разбрал, че в крайното класиране отборите са събрали общо S точки, и по това успял да определи със сигурност колко мача са завършили наравно. Колко са възможните двуцифрени стойности на S?

10. **Отг. 51** Нека има n отбора. Минимален сбор се получава, ако всички мачове са наравно, всеки ще има по $n-1$ точки и общо точките ще са $n(n-1)$. За всеки неравен мач този сбор нараства с 1 точка. Ако всички са неравни, точките ще са $3.n(n-1):2$, което е и максималният сбор.

n	≤ 3	4	5	6	7	8	9	10	≥ 11
мин.	≤ 6	12	20	30	42	56	72	90	≥ 110
макс.	≤ 9	18	30	45	63	84	108	135	≥ 165

Ако при различни стойности на n се получава една и съща стойност на S, то броят равни мачове няма да е същият, т.е. няма да може да се определи еднозначно. Следователно търсим двуцифрените стойности на S, които се срещат само в една колонка. Това са 12418 (7 числа), 20429 (10 числа), 31441 (11 числа), 46455 (10 числа), 64471 (8 числа) и 85489 (5 числа). Общо $7+10+11+10+8+5=51$ стойности.